

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Febrero 2007

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{-x^3 - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^3 + 1}}{x + 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x + 2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{1 - \cos x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 1} = \frac{3}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} = e^4$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{-x^3 - 2} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^3 + 1}}{x + 2} = \infty$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x + 2} = \infty$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{1 - \cos x} = -1$

Problema 2 Calcular las siguientes Integrales:

$$\text{a) } \int \frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{x} dx$$

$$\text{b) } \int x e^{x^2-1} dx$$

$$\text{c) } \int \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\text{d) } \int \frac{x}{\cos^2(x^2 - 1)} dx$$

$$\text{e) } \int \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} dx$$

Solución:

$$\text{a) } \int \frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + \sqrt{x} - \ln x + C$$

$$\text{b) } \int x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} e^{x^2-1} + C$$

$$\text{c) } \int \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \ln x + C$$

$$\text{d) } \int \frac{x}{\cos^2(x^2 - 1)} dx = \frac{1}{2} \tan(x^2 - 1) + C$$

$$\text{e) } \int \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan x + C$$

Problema 3 Calcular las siguientes derivadas:

$$\text{a) } y = \arctan(x^2 - 1)$$

$$\text{b) } y = (x^2 - 1)^{2x}$$

$$\text{c) } y = \ln(x^2 + 1)$$

$$\text{d) } y = \frac{2x - 2}{x^2}$$

$$\text{e) } y = e^{x^2-1}$$

$$\text{f) } y = \sin(2x - 1)$$

$$\text{g) } y = \tan(x^2 + 2)$$

Solución:

$$\text{a) } y = \arctan(x^2 - 1) \implies y' = \frac{2x}{1 + (x^2 - 1)^2}$$

b) $y = (x^2 - 1)^{2x} \implies y' = (x^2 - 1)^{2x-1} [2(x^2 - 1) \ln(x^2 - 1) + 4x^2]$

c) $y = \ln(x^2 + 1) \implies y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

d) $y = \frac{2x - 2}{x^2} \implies y' = \frac{-2x^2 + 4x}{x^4}$

e) $y = e^{x^2-1} \implies y' = 2xe^{x^2-1}$

f) $y = \sin(2x - 1) \implies y' = 2 \cos(2x - 1)$

g) $y = \tan(x^2 + 2) \implies y' = \frac{2x}{\cos^2(x^2 + 2)}$