Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2007

Problema 1 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = 2$

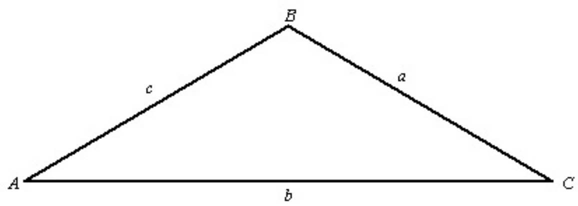
Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{5} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 2 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen sus tres lados: $a = 10$ cm, $b = 4$ cm y $C = 35^{\circ}$



Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 100 + 16 - 80\cos 35^{\circ} = 7,104\, cm$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow \frac{7,104}{\sin 35^{\circ}} = \frac{10}{\sin A} \Longrightarrow A = 53^{\circ}50'33''$$

La calculadora nos dá como resultado $A = 53^{\circ}50'33''$, pero este resultado no es válido dado que, el ángulo A tiene que ser obtuso, lo que corresponde al ángulo $180^{\circ} - 53^{\circ}50'33'' = 126^{\circ}9'27''$

$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 18^{\circ}50'33''$$

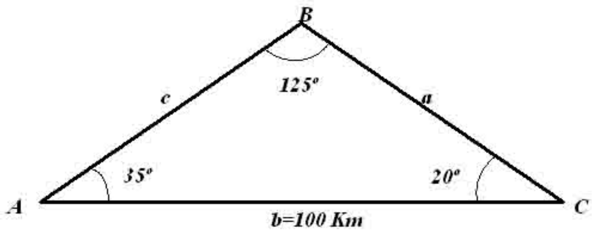
$$S\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 11,63\ cm^2$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Problema 3 Dos aeropuertos A y B reciben la señal de un avión, que está pidiendo un aterrizaje forzoso por la averia de uno de sus motores. El aeropuerto A recibe la señal con un ángulo de 35^o y el B con 20^o, ambos medidos con la horizontal. Si los aeropuertos están separados por una distancia de $200\ Km$, calcular la distancia desde cada aeropuerto al avión.

Solución:

$$C = 180^o - (35^o + 20^o) = 125^o$$



$$\frac{200}{\sin 125^o} = \frac{a}{\sin 35^o} \Longrightarrow a = 140,0415\,Km$$

$$\frac{200}{\sin 125^o} = \frac{b}{\sin 20^o} \Longrightarrow b = 83,5059\,Km$$

Problema 4 Calcular:

a) $(-1+i)\cdot(2+3i)$, $\dfrac{5+i}{-1+i}$

b) Si $z_1 = 2-i$, $z_2 = 5+2i$ y $z_3 = 3+i$ son tres números complejos, calcular $z = 2z_1 - 3\overline{z_2} + 5z_3$

c) $(2-i)^{10}$

Solución:

a) $(-1+i)\cdot(2+3i) = -5-i$, $\dfrac{5+i}{-1+i} = -2-3i$

b) Si $z_1 = 2-i$, $z_2 = 5+2i$ y $z_3 = 3+i$ son tres números complejos, calcular $z = 2z_1 - 3\overline{z_2} + 5z_3 = 4+9i$

c) $(2-i)^{10} \Longrightarrow |z| = \sqrt{5}$ y $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2}$; al estar en el cuarto cuadrante será $\alpha = 333^o26'5''$. Por tanto tenemos que $2-i = \sqrt{5}_{333^o26'5''}$:

$$(2-i)^{10} = (\sqrt{5}_{333^o26'5''}) = 5^5_{94^o20'58''} = 5^5(\cos 94^o20'58'' + i\sin 94^o20'58'')$$

Problema 5 Resolver la ecuación $z^4 + 16i = 0$ donde z es un número complejo.

Solución:

$$z^4 = -16i \Longrightarrow z = \sqrt[4]{-16i}$$

$$-16i \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |-16i| = 16 \\ \tan\alpha = -\frac{-16}{0} = -\infty \Longrightarrow \alpha = 270^{\text{o}} \end{array} \right. \Longrightarrow z = \sqrt[4]{16}_{\frac{270^{\text{o}}+k\cdot 360^{\text{o}}}{4}}$$

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k=0 \Longrightarrow z = 2_{67^{\text{o}}30'} = 2(\cos 67^{\text{o}}30' + i\sin 67^{\text{o}}30^{\text{o}}) = 0,765 + i\cdot 1,848 \\ \text{si } k=0 \Longrightarrow z = 2_{157^{\text{o}}30'} = 2(\cos 157^{\text{o}}30' + i\sin 157^{\text{o}}30') = -1,848 + i\cdot 0,765 \\ \text{si } k=0 \Longrightarrow z = 2_{247^{\text{o}}30'} = 2(\cos 247^{\text{o}}30' + i\sin 247^{\text{o}}30') = -0,765 - i\cdot 1,848 \\ \text{si } k=0 \Longrightarrow z = 2_{337^{\text{o}}30'} = 2(\cos 337^{\text{o}}30' + i\sin 337^{\text{o}}30') = 1,848 - i\cdot 0,765 \end{array} \right.$$