Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Junio 2007

Problema 1 Sean $A(-1,2)$, $B(2,1)$ y $C(5,5)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Encontrar el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Sus ángulos.

d) El centro.

Solución:

a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1,2) + (3,4) = (2,6)$

b) $|\overrightarrow{AB} = |(3,-1)| = \sqrt{10}$ y $|\overrightarrow{AD} = |(3,4)| = \sqrt{25} = 5$

c) $\cos\alpha = \dfrac{5}{5\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \Longrightarrow \alpha = 71^{o}33'54''$, $\beta = 180^{o} - \alpha = 108^{o}26'6''$

d) $\left(\dfrac{5-1}{2}, \dfrac{5+2}{2}\right) = \left(2, \dfrac{7}{2}\right)$

Problema 2 Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2,1)$ y $B(4,5)$. Calcular el ángulo que forma esta recta con el eje OX.
Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (2,4) \\ P_r = A(2,1) \end{array} \right.$$

$$(x,y) = (2,1) + \lambda(2,4) \quad \text{vectorial}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \end{array} \right. \quad \text{paramétrica}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} \quad \text{continua}$$

$$2x - y - 3 = 0 \quad \text{continua}$$

$$y = 2x - 3 \quad \text{explícita} \Longrightarrow \tan\alpha = m = 2 \Longrightarrow \alpha = 63^{o}26'6''$$

$$y - 1 = 2(x-2) \quad \text{punto pendiente}$$

Problema 3 Se pide:

a) Calcular la ecuación de una circunferencia de centro $C(3,-1)$ y radio $r = 4$.

b) Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Decidir si se trata de una circunferencia y, en caso afirmativo, calcular su centro y su radio.

Solución:

a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$

b) $m = -2a = -8 \Longrightarrow a = 4$, $n = -2b = 2 \Longrightarrow b = -1$ y $p = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = 4$. Luego se trata de una circunferencia de centro $(4, -1)$ y radio 4.

Problema 4 Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Se pide:

a) Dominio.

b) Puntos de corte.

c) Signo.

d) Simetrías.

e) Asíntotas.

f) Monotonía y extremos.

g) Curvatura y puntos de inflexión.

h) Representación aproximada de la gráfica.

i) Rectas tangente y normal a la gráfica en $x = 2$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$

b) Puntos de corte:

Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x}{x-1} = 0$ y tenemos el punto $(0, 0)$

c) Signo de la función: $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

d) Simetría:

$$f(-x) \neq f(x) \quad f(-x) \neq -f(x)$$

La función no es ni PAR ni IMPAR.

e) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

- Oblicuas: No hay

f) Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 \ \text{ siempre}$$

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

La función no tiene ni máximos ni mínimos.

g) Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0 \ \text{ siempre}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

No hay puntos de Inflexión.

h) Representación gráfica:

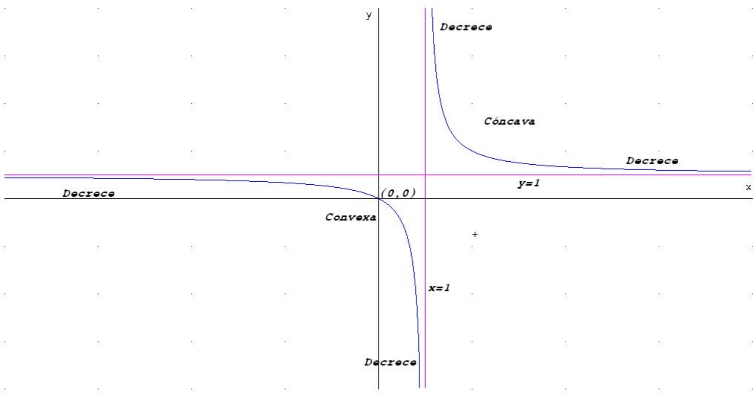
i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$:

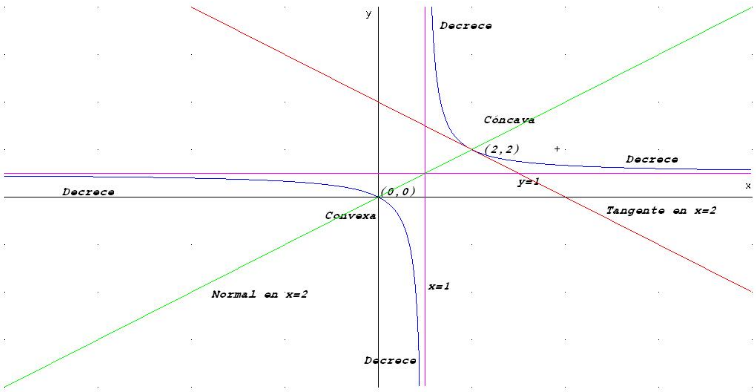
Como $f(2) = 2$ las rectas pasan por el punto $(2, 2)$.

Como $m = f'(2) = -1$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - 2 = -(x-2) \Longrightarrow x + y - 4 = 0$$

$$\text{Recta Normal}: \ y - 2 = x - 2 \Longrightarrow x - y = 0$$





Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2-bx+a}{x} & \text{si} \quad x \le -1 \\ bx^2 - ax - 1 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

calcular a y b de manera sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} \dfrac{ax^2 - bx + a}{x} = -2a - b \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} (bx^2 - ax - 1) = a + b - 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$-2a - b = a + b - 1 \Longrightarrow 3a + 2b = 1$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{ax^2-a}{x^2} & \text{si} \quad x < -1 \\ 2bx - a & \text{si} \quad x \ge -1 \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(-1^-) = 0 \\ f'(-1^+) = -2b - a \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$0 = -2b - a \Longrightarrow a + 2b = 0$$

Luego:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3a + 2b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = \dfrac{1}{2} \\ \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{array} \right.$$

Problema 6 Estudiar la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x - 5|$

b)

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x^2 + x - 1 & \text{si} & x \le 0 \\ -(2x + 1) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

Solución:

a)

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -x + 5 & \text{si} & x - 5 < 0 \\ x - 5 & \text{si} & x + 5 \ge 0 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -x + 5 & \text{si} & x < 5 \\ x - 5 & \text{si} & x \ge 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 5} (-x + 5) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 5} (x - 5) = 0 \\ \\ f(5) = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 5$$

Como las dos ramas son polinomios de grado uno, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -1 & \text{si} & x < 5 \\ 1 & \text{si} & x \ge 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'\left((5)^-\right) = -1 \\ \\ f'\left((5)^+\right) = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 5$$

Por tanto, la función no es derivable en R.

b)

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x^2 + x - 1 & \text{si} & x \le 0 \\ -(2x + 1) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(2x^2+x-1) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(-(2x+1) = -1 \\ \\ f(0) = -1 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

Como las dos ramas son polinomios, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ \\ f'(0^+) = -2 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 0$$

Por tanto, la función no es derivable en R.

Problema 7 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+7}}{x} & \text{si} & x < 1 \\ 3x & \text{si} & 1 < x \leq 2 \\ x^2+2 & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x} & \text{si} & x \leq 1 \\ x^2+2 & \text{si} & 1 < x < 5 \\ 2x & \text{si} & x \geq 5 \end{cases}$$

Solución:

a) En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable, un agujero. En $x = 2$ la función es continua.

b) En $x = 2$ la función es continua. En $x = 5$ hay una discontinuidad no evitable, un salto.