Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Septiembre 2007

Problema 1 Sean $A(-2,2)$, $B(3,-1)$ y $C(5,5)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Encontrar el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Sus ángulos.

d) El centro.

Solución:

a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-2,2) + (2,6) = (0,8)$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(5,-3)| = \sqrt{34}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2,6)| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{-8}{2\sqrt{340}} \Longrightarrow \alpha = 102^{\circ}31'44''$, $\beta = 180^{\circ} - \alpha = 77^{\circ}28'16''$

d) $\left(\dfrac{5-2}{2}, \dfrac{5+2}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

Problema 2 Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,4)$. Calcular el ángulo que forma esta recta con el eje OX.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (2,2) \\ P_r = A(1,2) \end{cases}$$

$$(x,y) = (1,2) + \lambda(2,2) \quad \text{vectorial}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{paramétrica}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} \quad \text{continua}$$

$$x - y + 1 = 0 \quad \text{general}$$

$$y = x + 1 \quad \text{explícita} \Longrightarrow \tan\alpha = m = 1 \Longrightarrow \alpha = 45^{\circ}$$

$$y - 2 = 1(x-1) \quad \text{punto pendiente}$$

Problema 3 Se pide:

a) Calcular la ecuación de una circunferencia de centro $C(5,-2)$ y radio $r = \sqrt{3}$.

b) Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 1 = 0$. Decidir si se trata de una circunferencia y, en caso afirmativo, calcular su centro y su radio.

Solución:

a) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 3 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4y + 26 = 0$

b) $m = -2a = -6 \Longrightarrow a = 3$, $n = -2b = 4 \Longrightarrow b = -2$ y $p = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Luego se trata de una circunferencia de centro $(3, 2)$ y radio $2\sqrt{3}$.

Problema 4 Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Se pide:

a) Dominio.

b) Puntos de corte.

c) Signo.

d) Simetrías.

e) Asíntotas.

f) Monotonía y extremos.

g) Curvatura y puntos de inflexión.

h) Representación aproximada de la gráfica.

i) Rectas tangente y normal a la gráfica en $x = -2$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{-1\}$

b) Puntos de corte:

Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x}{x+1} = 0$ y tenemos el punto $(0, 0)$

c) Signo de la función: $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

d) Simetría:

$$f(-x) \neq f(x) \quad f(-x) \neq -f(x)$$

La función no es ni PAR ni IMPAR.

e) Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

- Oblicuas: No hay

f) Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ siempre}$$

La función es Creciente en el intervalo: $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

La función no tiene ni máximos ni mínimos.

g) Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \text{ siempre}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

No hay puntos de Inflexión.

h) Representación gráfica:

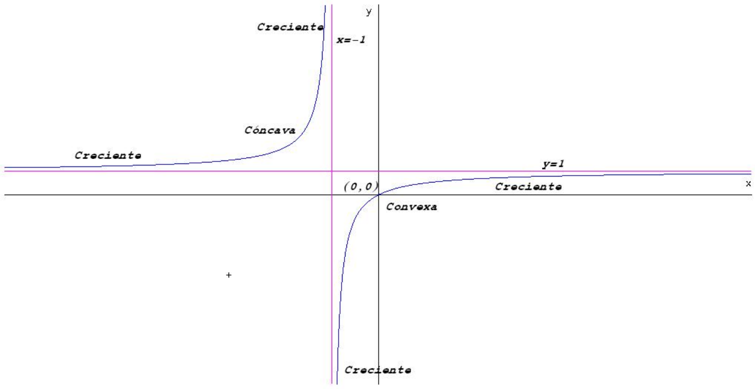
i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = -2$:

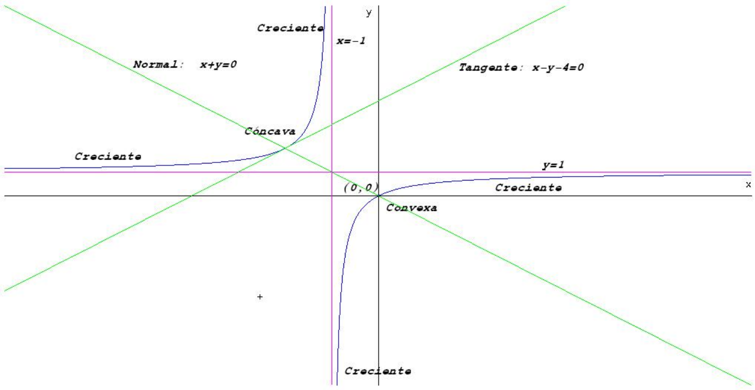
Como $f(-2) = 2$ las rectas pasan por el punto $(-2, 2)$.

Como $m = f'(-2) = 1$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - 2 = (x+2) \Longrightarrow x - y + 4 = 0$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - 2 = -(x+2) \Longrightarrow x + y = 0$$





Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} ax^2 - bx + a & \text{si} & x \le 1 \\ x^2 - x - a & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

calcular a y b de manera sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - bx + a) = 2a - b \\ \\ \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (x^2 - x - a) = -a \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$2a - b = -a \Longrightarrow 3a - b = 0$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2ax - b & \text{si} & x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 2a - b \\ f'(1^+) = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow 2a - b = 1$$

Luego:

$$\left\{\begin{array}{l} 3a-b=0 \\ 2a-b=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ \\ b=-3 \end{array}\right.$$

Problema 6 Estudiar la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=|x-1|$

b)

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} x^2+x-1 & \text{si} & x\le 1 \\ 2x-1 & \text{si} & x>1 \end{array}\right.$$

Solución:

a)

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} -x+1 & \text{si} & x-1<0 \\ x-1 & \text{si} & x+1\ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)=\left\{\begin{array}{lll} -x+1 & \text{si} & x<1 \\ x-1 & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}(-x+1)=0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x-1)=0 \\ \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=1$$

Como las dos ramas son polinomios de grado uno, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} -1 & \text{si} & x<1 \\ 1 & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'\left((1)^-\right)=-1 \\ \\ f'\left((1)^+\right)=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x=1$$

Por tanto, la función no es derivable en R.

b)

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} x^2+x-1 & \text{si} & x\le 1 \\ 2x-1 & \text{si} & x>1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x^2+x-1)=1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}(2x-1)=1 \\ \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=1$$

Como las dos ramas son polinomios, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} f'(1^-) = 3 \\ \\ f'(1^+) = 2 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 1$$

Por tanto, la función no es derivable en R.

Problema 7 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} & x < 0 \\ x^2+2 & \text{si} & 0 < x \leq 2 \\ 3x & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

en los puntos $x = 0$ y $x = 2$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} & x \leq 1 \\ 3x-1 & \text{si} & 1 < x < 5 \\ 2x & \text{si} & x \geq 5 \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$ y $x = 2$

Solución:

a) En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable, un agujero. En $x = 2$ la función es continua.

b) En $x = 1$ la función es continua. En $x = 5$ hay una discontinuidad no evitable, un salto.