Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Enero 2007 (Recuperación)

Problema 1 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & 2z= & 1 \\ x- & & z= & 2 \\ x- & 2y+ & 7z= & -4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & -z & =0 \\ 2x+ & y & & =2 \\ x+ & 2y & +z & =1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & 2z= & 1 \\ x- & & z= & 2 \\ x- & 2y+ & 7z= & -4 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=3+4\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & -z & =0 \\ 2x+ & y & & =2 \\ x+ & 2y & +z & =1 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5/4 \\ y=-1/2 \\ z=3/4 \end{array}\right.$$

Problema 2 Resolver las ecuaciones:

a) $\log(x^2-1)+1=2\log(x-2)$

b) $2^{2x-1}+2^{x+2}-1=0$

c) $\dfrac{x-1}{x^2-2x-15}-\dfrac{1}{x+3}=1-\dfrac{1}{x-5}$

d) $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+7}\geq 0$

e) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$

f) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=2$

Solución:

a) $\log(x^2-1)+1=2\log(x-2)\Longrightarrow \log 10(x^2-1)=\log(x-1)^2\Longrightarrow$

$9x^2+4x-14=0\Longrightarrow x=1,0446,\ \ x=-1,1231$ y no vale ninguna de ellas.

b) $2^{2x-1}+2^{x+2}-1=0\Longrightarrow \dfrac{t^2}{2}+4t-1=0\Longrightarrow t=0,2426\ \ t=-8,2426$(No Vale).

$2^x=0,2426\Longrightarrow x=\dfrac{\log 0,2426}{\log 2}=-2,04310$

c) $\dfrac{x-1}{x^2-2x-15} - \dfrac{1}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{x-5} \Longrightarrow x^2 - 3x - 22 = 0 \Longrightarrow$

$$x = 6.424428900;\ x = -3.424428900$$

.

d) $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+7} = \dfrac{(x+5)(x-3)}{(x-1)(x-7)} \geq 0 \Longrightarrow$

$$(-\infty, -5] \cup (1, 3] \cup (7, \infty)$$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1 \Longrightarrow\ x = 5$

$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 2 \Longrightarrow\ x = 22,58300524$

Problema 3 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^4-4x-8}{x^3+x-10}$

d) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^6-1}{x^5-1}$

e) $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1} = e^3$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x-1} = e^{-5}$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^4-4x-8}{x^3+x-10} = \dfrac{28}{13}$

d) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^6-1}{x^5-1} = \dfrac{6}{5}$

e) $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \dfrac{2}{3}$

f) $\lim_{x \longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3} = \dfrac{3}{2}$

Problema 4 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 - 2x + 1)^{11}$

b) $y = x^2 \ln x$

c) $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

d) $y = e^{2x^2-1}$

e) $y = 3^{4x-1}$

f) $y = \log_3(x^2-1)$

g) $y = (2x^2+1)^{\ln(x)}$

h) $y = \frac{x^2-2x+5}{x-3}$

Solución:

a) $y = (x^3 - 2x + 1)^{11} \Longrightarrow y' = 11(3x-2)(x^3-2x+1)^{10}$

b) $y = x^2 \ln x \Longrightarrow y' = 2x \ln x + x$

c) $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}$

d) $y = e^{2x^2-1} \Longrightarrow y' = 4xe^{2x^2-1}$

e) $y = 3^{4x-1} \Longrightarrow y' = 4 \cdot 3^{4x-1} \ln 3$

f) $y = \log_3(x^2-1) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$

g) $y = (2x^2+1)^{\ln(x)} \Longrightarrow y' = (2x^2+1)^{\ln(x)} \left(\frac{\ln(2x^2+1)}{x} + \frac{4x\ln(x)}{2x^2+1}\right)$

h) $y = \frac{x^2-2x+5}{x-3} \Longrightarrow y' = \frac{x^2-6x+1}{(x-3)^2}$

Problema 5 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

$$a = 0, \quad f(a) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -1$$

Recta Tangente: $y - 1 = -x \Longrightarrow x + y - 1 = 0$

Recta Normal: $y - 1 = x - 0 \Longrightarrow x - y + 1 = 0$