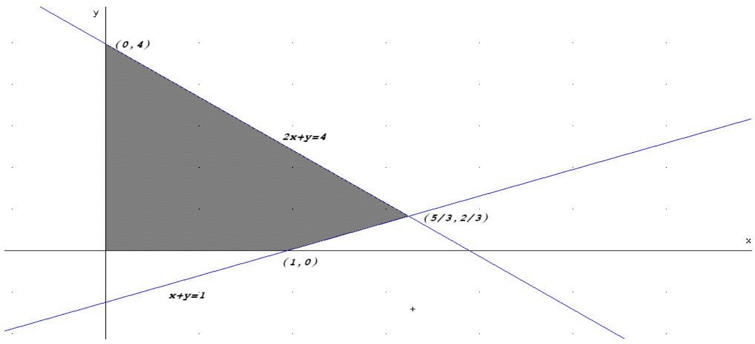
Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Diciembre 2006

Problema 1 Calcular los valores máximo y mínimo que toma la función $z(x,y) = 2x - y$ en el siguiente recinto

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y \le 4 \\ x - y \le 1 \\ x,\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

Solución: Observar el dibujo:



$$\left\{\begin{array}{l} z(1,0) = 2 \\ z(0,4) = -4 \\ z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \end{array}\right.$$

El valor máximo corresponde al punto $(5/3, 2/3)$ con un valor de $8/3$ y el valor mínimo corresponde al punto $(0,4)$ con valor -4.

Problema 2 Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{x-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^4-4x-8}{x^3+x-10}$

d) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^6-1}{x^5-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

f) $\lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1} = e^3$

b) $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x-1} = e^{-5}$

c) $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^4-4x-8}{x^3+x-10} = \dfrac{28}{13}$

d) $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^6-1}{x^5-1} = \dfrac{6}{5}$

e) $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \dfrac{2}{3}$

f) $\lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3} = \dfrac{3}{2}$

Problema 3 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3-2x+1)^{11}$

b) $y = x^2 \ln x$

c) $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

d) $y = e^{2x^2-1}$

e) $y = 3^{4x-1}$

f) $y = \log_3(x^2-1)$

g) $y = (2x^2+1)^{\ln(x)}$

h) $y = \frac{x^2-2x+5}{x-3}$

Solución:

a) $y = (x^3-2x+1)^{11} \Longrightarrow y' = 11(3x-2)(x^3-2x+1)^{10}$

b) $y = x^2 \ln x \Longrightarrow y' = 2x\ln x + x$

c) $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}$

d) $y = e^{2x^2-1} \Longrightarrow y' = 4xe^{2x^2-1}$

e) $y = 3^{4x-1} \Longrightarrow y' = 4 \cdot 3^{4x-1} \ln 3$

f) $y = \log_3(x^2-1) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$

g) $y = (2x^2+1)^{\ln(x)} \Longrightarrow y' = (2x^2+1)^{\ln(x)} \left(\frac{\ln(2x^2+1)}{x} + \frac{4x\ln(x)}{2x^2+1}\right)$

h) $y = \frac{x^2-2x+5}{x-3} \Longrightarrow y' = \frac{x^2-6x+1}{(x-3)^2}$

Problema 4 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

$$a = 0, \;\; f(a) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -1$$

Recta Tangente: $y - 1 = -x \Longrightarrow x + y - 1 = 0$

Recta Normal: $y - 1 = x - 0 \Longrightarrow x - y + 1 = 0$