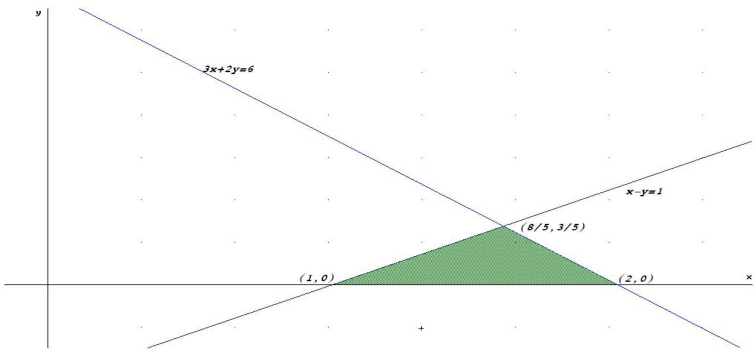
Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Diciembre 2006

Problema 1 Calcular los valores máximo y mínimo que toma la función $z(x, y) = 2x + y$ en el siguiente recinto

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 6 \\ x - y \ge 1 \\ x,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Solución: Observar el dibujo:



$$\begin{cases} z(1, 0) = 2 \\ z(2, 0) = 4 \\ z\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{19}{5} \end{cases}$$

El valor máximo corresponde al punto $(2, 0)$ con un valor de 4 y el valor mínimo corresponde al punto $(1, 0)$ con valor 2.

Problema 2 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$

c) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^3 - 2x - 4}$

d) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}$

e) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1} - 3}{x - 2}$

f) $\lim_{x \longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3}$

Solución:

a) $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1} = e^2$

b) $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+2} = e^2$

c) $\lim_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^4-3x^2-4}{x^3-2x-4} = 2$

d) $\lim_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^5-1}{x^4-1} = \dfrac{5}{4}$

e) $\lim_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2} = \dfrac{4}{3}$

f) $\lim_{x \longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3} = \dfrac{9}{4}$

Problema 3 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2-x+1)^{11}$

b) $y = x \ln x$

c) $y = \ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)$

d) $y = e^{x^2-1}$

e) $y = 5^{5x-1}$

f) $y = \log_3(x^2+1)$

g) $y = (x^2-1)^{\ln(x)}$

h) $y = \frac{x^2+x-5}{x-3}$

Solución:

a) $y = (x^2-x+1)^{11} \Longrightarrow y' = 11(2x-1)(x^2-x+1)^{10}$

b) $y = x \ln x \Longrightarrow y' = \ln x + 1$

c) $y = \ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right) \Longrightarrow y' = \frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{2x}{x^2-1}$

d) $y = e^{x^2-1} \Longrightarrow y' = 2xe^{x^2-1}$

e) $y = 5^{5x-1} \Longrightarrow y' = 5 \cdot 5^{5x-1} \ln 5$

f) $y = \log_3(x^2+1) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$

g) $y = (x^2-1)^{\ln(x)} \Longrightarrow y' = (x^2-1)^{\ln(x)} \left(\frac{\ln(x^2-1)}{x} + \frac{2x\ln(x)}{x^2-1}\right)$

h) $y = \frac{x^2+x-5}{x-3} \Longrightarrow y' = \frac{x^2-6x+2}{(x-3)^2}$

Problema 4 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

$$a = 0, \;\; f(a) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 1/4$$

Recta Tangente: $y - 1 = \dfrac{1}{4}x \Longrightarrow x - 4y + 4 = 0$

Recta Normal: $y - 1 = -4x \Longrightarrow 4x + y - 1 = 0$