Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2007

Problema 1 Sean la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Se pide estudiar:

a) Dominio de f.

b) Puntos de corte.

c) Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

d) Simetría.

e) Asíntotas.

f) Monotonía y extremos relativos.

g) Curvatura y puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R$

b) Puntos de corte:

Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = -1 \Longrightarrow (0, -1)$

Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$ y tenemos los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

c) Signo de la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

d) Simetría:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = f(x)$$

La función es PAR.

e) Asíntotas:

- Verticales: No tiene
- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

- Oblicuas: No hay

f) Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, 0)$

La función es creciente en el intervalo: $(0, \infty)$

La función presenta un Mínimo en el punto $(0, -1)$.

g) Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

Tenemos dos puntos de Inflexión en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

h) Representación gráfica:

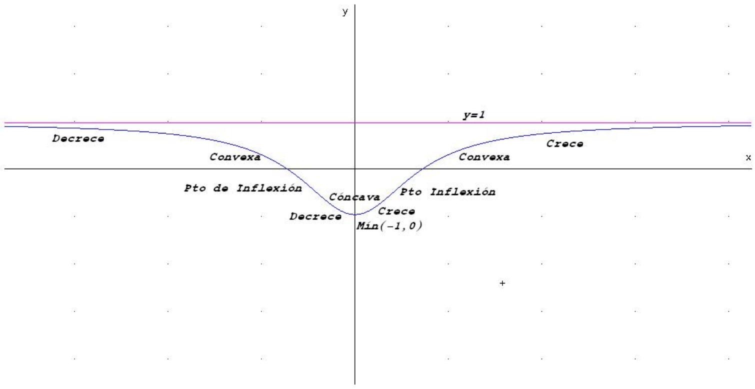
i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$:

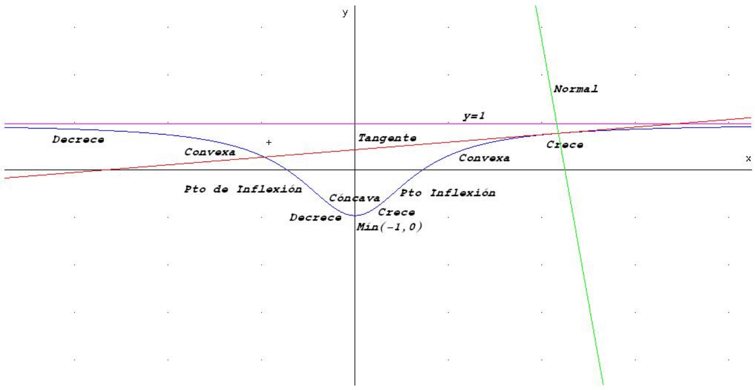
Como $f(3) = 4/5$ las rectas pasan por el punto $(3, 4/5)$.

Como $m = f'(3) = 3/25$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: y - \frac{4}{5} = \frac{3}{25}(x - 3)$$

$$\text{Recta Normal}: y - \frac{4}{5} = -\frac{25}{3}(x - 3)$$


y
y=1
Decrece
Crece
Convexa
Convexa
x
Pto de Inflexión
Cóncava
Pto Inflexión
Decrece
Crece
Min(-1,0)


y
Normal
y=1
Decrece
Tangente
Crece
Convexa
Convexa
x
Pto de Inflexión
Cóncava
Pto Inflexión
Decrece
Crece
Min(-1,0)