Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2007

Problema 1 Sean la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Se pide estudiar:

a) Dominio de f.

b) Puntos de corte.

c) Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

d) Simetría.

e) Asíntotas.

f) Monotonía y extremos relativos.

g) Curvatura y puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{-1, 1\}$

b) Puntos de corte:

Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = -1 \Longrightarrow (0, -1)$

Con el eje OX no tiene

c) Signo de la función: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

d) Simetría:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = f(x)$$

La función es PAR.

e) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

  $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

- Oblicuas: No hay

f) Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

La función es decreciente en el intervalo: $(0, 1) \cup (1, \infty)$

La función presenta un Máximo en el punto $(0, -1)$.

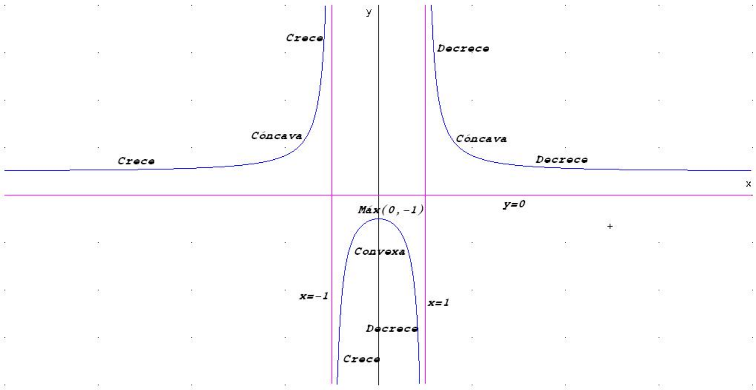
g) Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0$$

Como $f''(x)$ es distinta de cero para cualquier valor de x no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

h) Representación gráfica:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$:

Como $f(3) = 5/4$ las rectas pasan por el punto $(3, 5/4)$.

Como $m = f'(3) = -3/16$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - \frac{5}{4} = -\frac{3}{16}(x-3)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{5}{4} = \frac{16}{3}(x-3)$$