Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2007

Problema 1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{4-2x}{x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{4-2x}{x} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} (3x-6) = 0 \\ \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{-4}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 3 \\ f'(2^+) = -1 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 2$$

Problema 2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = |2x - 3|$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en R.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si} \quad 2x - 3 < 0 \\ 2x - 3 & \text{si} \quad 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si} \quad x < 3/2 \\ 2x - 3 & \text{si} \quad x \geq 3/2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow (3/2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3/2} (2x-3) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3/2} (-2x+3) = 0 \\ \\ f(3/2) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = \frac{3}{2}$$

Como las dos ramas son polinomios de grado uno, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 3/2 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 3/2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} f'\left(\left(\frac{3}{2}\right)^-\right) = -2 \\ \\ f'\left(\left(\frac{3}{2}\right)^+\right) = 2 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la función no es derivable en R.

Problema 3 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - bx}{x-2} & \text{si } \quad x < 1 \\ \\ 2x^2 + 3bx - a & \text{si } \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (2x^2 + 3bx - a) = -a + 3b + 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{ax^2 - bx}{x-2} = -a + b \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$-a + 3b + 2 = -a + b \Longrightarrow b = -1$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - 4ax + 2b}{(x-2)^2} & \text{si } \quad x < 1 \\ \\ 4x + 3b & \text{si } \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \left.\begin{cases} f'(1^-) = -3a + 2b \\ f'(1^+) = 4 + 3b \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$-3a + 2b = 4 + 3b \Longrightarrow 3a + b = -4$$

Luego:

$$\begin{cases} b = -1 \\ 3a + b = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \\ b = -1 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } \quad x < -1 \\ \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } \quad -1 \leq x \leq 2 \\ \\ x^2 + x + 2 & \text{si } \quad x > 2 \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

En $x = -1$ hay continuidad, y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 5 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2x & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ \\ 3x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

En $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable(salto), y en $x = 2$ es continua.