Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Junio 2007

Problema 1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{4x - 2}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{4x - 2}{x} = 2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (3x - 1) = 2 \\ \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{2}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 1$$

Problema 2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = |3x - 2|$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en R.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si} \quad 3x - 2 < 0 \\ 3x - 2 & \text{si} \quad 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si} \quad x < 2/3 \\ 3x - 2 & \text{si} \quad x \geq 2/3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow (2/3)^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2/3} (3x - 2) = 0 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow (2/3)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2/3} (-3x + 2) = 0 \\ \\ f(2/3) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = \frac{2}{3}$$

Como las dos ramas son polinomios de grado uno, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad x < 2/3 \\ 3 & \text{si} \quad x \geq 2/3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} f'\left(\left(\frac{2}{3}\right)^-\right) = -3 \\ \\ f'\left(\left(\frac{2}{3}\right)^+\right) = 3 \end{cases}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la función no es derivable en R.

Problema 3 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x^2 + ax + b) = a + b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(3ax^2 - bx + 1) = 3a - b + 1 \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$a + b + 1 = 3a - b + 1 \Longrightarrow a - b = 0$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \left.\begin{cases} f'(1^-) = 6a - b \\ f'(1^+) = 2 + a \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$6a - b = 2 + a \Longrightarrow 5a - b = 2$$

Luego:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ 5a - b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{si} & x < 0 \\ \\ (x-1)^2 & \text{si} & 0 < x \leq 1 \\ \\ x^2 + 3x & \text{si} & x > 1 \end{cases}$$

en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 1$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 5 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ 2x-5 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

en los puntos $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 3$ es continua.