Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Mayo 2007

Problema 1 Sean la función real de variable real

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$$

Se pide estudiar:

a) Dominio de f.

b) Puntos de corte.

c) Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

d) Simetría.

e) Asíntotas.

f) Monotonía y extremos relativos.

g) Curvatura y puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$.

j) Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$

b) Puntos de corte:

Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = -4 \Longrightarrow (0, -4)$

Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow (2, 0)$

c) Signo de la función: $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

d) Simetría:

$$\begin{cases} f(-x) = \dfrac{(-x-2)^2}{-x-1} = -\dfrac{(x+2)^2}{x+1} \\ \\ f(-x) \neq f(x) \text{ y } f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$$

La función no es ni par ni impar

e) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-2)^2}{x-1} - x \right) = -3$$

$$y = x - 3$$

f) Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(0, 1) \cup (1, 2)$

La función presenta un Máximo en el punto $(0, -4)$ y un Mínimo en el $(2, 0)$.

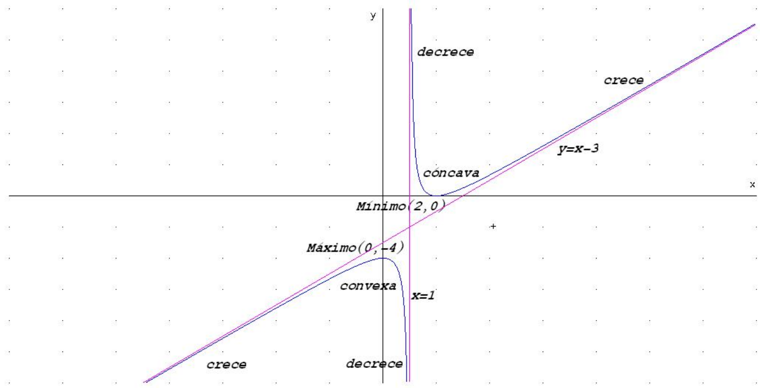
g) Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$$

Como $f''(x)$ es distinta de cero para cualquier valor de x no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

h) Representación gráfica:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$:

Como $f(3) = 1/2$ las rectas pasan por el punto $(3, 1/2)$.

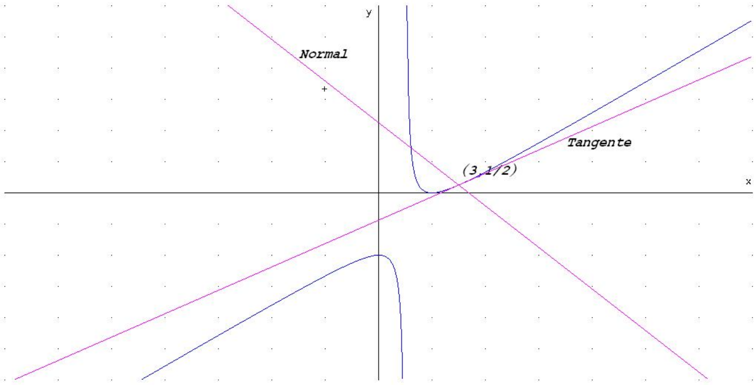
Como $m = f'(3) = 3/4$ tenemos que

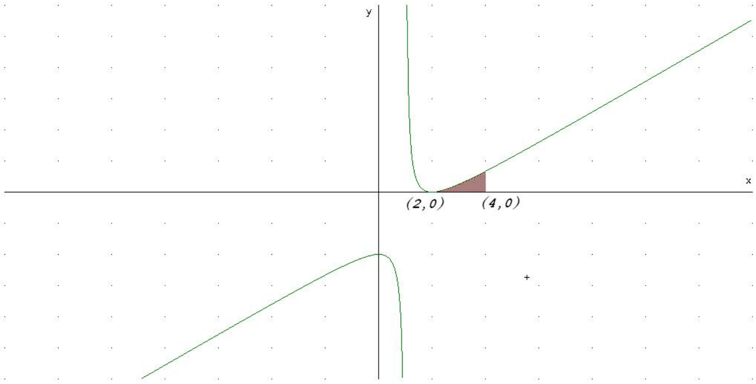
$$\text{Recta Tangente}: \; y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x-3)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-3)$$

j) Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$:

$$S = \int_2^4 \frac{(x-2)^2}{x-1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x-1|\right]_2^4 = \ln 3$$


y
Normal
Tangente
(3,1/2)
x


y
x
(2,0)
(4,0)