Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Febrero 2006

Problema 1 Estudiar la monotonía, máximos y mínimos de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = -4,\ x = 0$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en el punto $(-4, -9)$ la función tiene un máximo, y el punto $(0, -1)$ la función tiene un mínimo.

2.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Longrightarrow x = -1,\ \ x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en el punto $(-1, 12)$ la función tiene un máximo, y el punto $(3, -20)$ la función tiene un mínimo.

$$f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow \begin{cases} f''(-1) = -12 > 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ f''(3) = 12 < 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

Problema 2 Tenemos 500 metros de alambre para vallar un campo rectangular, uno de cuyos lados da a un río. Calcular la longitud que deben tener estos lados para que el área encerrada sea la máxima posible.

Solución:

$$2x + y = 500 \Longrightarrow y = 500 - 2x$$

$$S = x \cdot y = x(500 - 2x) = 500x - 2x^2$$

$$S' = 500 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 125$$

$$S'' = -4 \Longrightarrow \text{Máximo}$$

La solución sería $x = 125$ m. y $y = 250$ m.

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua y derivable.

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2bx + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - 3x - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Por continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} = a - 2b + 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} = -a + b - 3$$

$$a - 2b + 2 = -a + b - 3 \Longrightarrow 2a - 3b + 5 = 0$$

Por derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 3a - 2 \\ f'(1^+) = 2b - 3 \end{cases}$$

$$3a - 2 = 2b - 3 \Longrightarrow 3a - 4b + 3 = 0$$

$$\begin{cases} 2a - 3b + 5 = 0 \\ 3a - 4b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 11 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 3x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x^2 + \ln(1 + x) + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} = f(0) = 1 \Longrightarrow \text{continua en}\, x = 0$$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 6x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 4x + \frac{1}{1+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{derivable}$$

Problema 5 Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

1.

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 + \frac{1}{x+1} - e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x^2 + x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + \sin 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + \cos 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) \text{ no definida} \Longrightarrow \text{ discontinua evitable } x = 0$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \Longrightarrow \text{ discontinua inevitable } x = 0$$