Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Noviembre 2005

Problema 1 Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $3 \cdot 2^{2x+2} - 2^{x+1} - 6 = 0$
2. $5^{x-1} - 5^{x+1} + 1 = 0$

Solución:

1. $3 \cdot 2^{2x+2} - 2^{x+1} - 6 = 0 \Longrightarrow x = -0,3303678915$
2. $5^{x-1} - 5^{x+1} + 1 = 0 \Longrightarrow x = -0,9746358686$

Problema 2 Resolver las ecuaciones:

1. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} = 1$
2. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-5} = 2$
3. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} = 2$

Solución:

1. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} = 1 \Longrightarrow$ sin solución
2. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-5} = 2 \Longrightarrow x = 6,5625$
3. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} = 2 \Longrightarrow x = 0$

Problema 3 Encontrar el valor máximo y mínimo que toma la función $z(x,y) = x - 3y^2 + 1$ dentro del recinto (región factible)

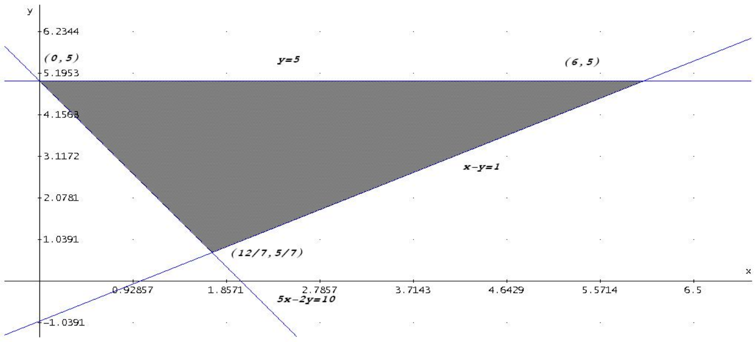
$$\begin{cases} 5x + 2y > 10 \\ x - y < 1 \\ 0 < y < 5x > 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} z(0,5) = -74 \\ z(6,5) = -68 \\ z\left(\frac{12}{7}, \frac{5}{7}\right) = 1,183673469 \end{cases}$$

Luego el máximo se alcanza en el punto $\left(\frac{12}{7}, \frac{5}{7}\right)$ con un resultado de 1,183673469. El mínimo se alcanza en el punto $(0,5)$ con -74.

Observar el dibujo:



Problema 4 Resolver las ecuaciones polinómicas siguientes:

1. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x-15} - \dfrac{1}{3-x} = 2 - \dfrac{1}{x+5}$

2. $\dfrac{x+5}{x^2-3x-4} - \dfrac{x}{x+1} = 2 - \dfrac{x}{4-x}$

Solución:

1. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x-15} - \dfrac{1}{3-x} = 2 - \dfrac{1}{x+5} \Longrightarrow x = -4,183300132, \;\; x = 4,183300132$

2. $\dfrac{x+5}{x^2-3x-4} - \dfrac{x}{x+1} = 2 - \dfrac{x}{4-x} \Longrightarrow \; x = -0,9437410968, \; x = 3,443741096$

Problema 5 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = (x^4 - 3x^2 + x - 1)^{14}$
2. $y = x^5 e^{x^2-1}$
3. $y = \ln\left(\frac{x^3+2}{2x-1}\right)$
4. $y = e^{x^4+x-1}$
5. $y = 5^{x^3+x-1}$
6. $y = \log_9(x^3 + 3x - 1)$
7. $y = (x^3 + x - 1)^{\ln(2x+1)}$
8. $y = \frac{x^2-3x-1}{x+2}$

Solución:

1. $y = (x^4 - 3x^2 + x - 1)^{14} \Longrightarrow y' = 14(4x^3 - 6x + 1)(x^4 - 3x^2 + x - 1)^{13}$
2. $y = x^5 e^{x^2-1} \Longrightarrow y' = 5x^4 e^{x^2-1} + 2x^6 e^{x^2-1}$

3. $y = \ln\left(\frac{x^3+2}{2x-1}\right) \Longrightarrow y' = \frac{6x^2}{x^3+2} - \frac{2}{2x-1}$

4. $y = e^{x^4+x-1} \Longrightarrow y' = (4x^3+1)e^{x^4+x-1}$

5. $y = 5^{x^3+x-1} \Longrightarrow y' = (3x^2+1)5^{x^3+x-1}\ln 5$

6. $y = \log_9(x^3+3x-1) \Longrightarrow y' = \frac{3x^2+3}{(x^3+3x-1)\ln 9}$

7. $y = (x^3+x-1)^{\ln(2x+1)} \Longrightarrow y' = (x^3+x-1)^{\ln(2x+1)}\left(\frac{2\ln(x^2+x-1)}{2x+1} + \frac{(3x^2+1)\ln(2x+1)}{x^3+x-1}\right)$

8. $y = \frac{x^2-3x-1}{x+2} \Longrightarrow y' = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$

Problema 6 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{2x-1}$ en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

$$a = 1, \ \ f(a) = f(1) = 5$$

$$f'(x) = \frac{2(2x^2-2x-3)}{(2x-1)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -6$$

Recta Tangente: $y - 5 = -6(x-1) \Longrightarrow\Longrightarrow 6x + y - 11 = 0$

Recta Normal: $y - 5 = \frac{1}{6}(x-1) \Longrightarrow x - 6y + 29 = 0$