Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Octubre 2004

Problema 1 *(2 puntos)*Dados los intervalos $A = (-5, 2]$, $B = (-\infty, 3)$ y $C = [3, 9)$. Calcular:

1. $A \cup B$ y $A \cap B$
2. $A \cup C$ y $A \cap C$
3. $B \cup C$ y $B \cap C$

Solución:

1. $A \cup B = (-\infty, 3)$ y $A \cap B = (-5, 2]$
2. $A \cup C = (-5, 2] \cup [3, 9)$ y $A \cap C = \phi$
3. $B \cup C = (-\infty, 9)$ y $B \cap C = \phi$

Problema 2 *(2 puntos)*Simplificar al máximo las siguientes expresiones:

$$\text{a)}\sqrt{\frac{5}{7}}\sqrt{\frac{343}{125}},\quad \text{b)}\sqrt{45} - 3\sqrt{125},\quad \text{c)}\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}},\quad \text{d)}\sqrt{\frac{2}{27}}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{e)}\sqrt{48} - 2\sqrt{12},\quad \text{f)}\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

Solución:

$$\text{a)}\sqrt{\frac{5}{7}}\sqrt{\frac{343}{125}} = \frac{7}{5},\quad \text{b)}\sqrt{45} - 3\sqrt{125} = -12\sqrt{5},\quad \text{c)}\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{11+6\sqrt{2}}{7},$$

$$\text{d)}\sqrt{\frac{2}{27}}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3},\quad \text{e)}\sqrt{48} - 2\sqrt{12} = 0,\quad \text{f)}\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$$

Problema 3 *(2 puntos)*Simplificar

$$\text{a)}\sqrt[6]{x^4}\sqrt[3]{x^2},\quad \text{b)}\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}},\quad \text{c)}\sqrt[3]{a}\sqrt{a^7},\quad \text{d)}\frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt{2}},\quad \text{e)}\sqrt[6]{x^4}\sqrt[3]{x^2},\quad \text{f)}\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}}$$

Solución:

$$\text{a)}\sqrt[6]{x^4}\sqrt[3]{x^2} = x\sqrt[3]{x},\quad \text{b)}\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}} = a\sqrt[6]{a},\quad \text{c)}\sqrt[3]{a}\sqrt{a^7} = a^3\sqrt[6]{a^5},$$

$$\text{d)}\frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2},\quad \text{e)}\sqrt[6]{x^4}\sqrt[3]{x^2} = x\sqrt[3]{x},\quad \text{f)}\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}} = a\sqrt[5]{a}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver los siguientes límites:

1. a) $\lim_{x\longrightarrow\infty}(x^2-2x-1)$ b) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^4+2}$ c) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{8x^5-x-1}{4x^5+1}$

   d) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-x^5+x^3-1}{3x^3-1}$

2. a) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}\right)^{2x}$ b) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$ c) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-x+1}{2x^3-1}\right)^{x^2}$

   d) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2}\right)^{x^2}$

Solución:

1. a) $\lim_{x\longrightarrow\infty}(x^2-2x-1)=\infty,\quad$ b) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^4+2}=0$

   c) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{8x^5-x-1}{4x^5+1}=2,\quad$ d) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-x^5+x^3-1}{3x^3-1}=-\infty$

2. a) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}\right)^{2x}=(3^\infty)=\infty$

   b) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}=(1^\infty)=e^\lambda=e^2$

   $\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left(\dfrac{x+1}{x-1}-1\right)=2$

   c) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-x+1}{2x^3-1}\right)^{x^2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^\infty=0$

   d) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2}\right)^{x^2}=(1)^\infty=e^\lambda$

   $\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}x^2\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2}-1\right)=\dfrac{2}{3}$

Problema 5 *(2 puntos)*

1. $\log x^2+1=\log x^3$

2. $\log(2x+7)-\log(x-1)=\log 5$

Solución:

1. $\log x^2+1=\log x^3\Longrightarrow\log 10x^2=\log x^3\Longrightarrow x^3-10x^2\Longrightarrow$

   $x=0\,(\text{no vale}),\quad x=10$

2. $\log(2x+7)-\log(x-1)=\log 5\Longrightarrow\log\dfrac{2x+7}{x-1}=\log 5\Longrightarrow x=4$