

Examen de Matemáticas

1º Bachillerato (Marzo 2003)

1. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$, calcular el radio y la recta tangente a esta circunferencia en el punto $P(4,3)$. Expresar la ecuación de ella en forma paramétrica, continua y general.

Solución:

Calculamos el centro y el radio de la circunferencia

$$\begin{cases} m = -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ n = -2b = -2 \Rightarrow b = 1 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(3,1) \\ r = \sqrt{5} \end{cases}$$

El vector que une el centro con el punto de tangencia será :

$$\overrightarrow{CP} = (4,3) - (3,1) = (1,2)$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2,1) \text{ perpendicular a } \overrightarrow{CP} \\ P(4,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \text{ (ecuación paramétrica)}$$

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{1} \text{ (ecuación continua)}$$

$$x + 2y - 10 = 0 \text{ (ecuación general)}$$

2. a) Si la ecuación reducida de una elipse es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, calcular los vértices, los focos y su excentricidad.

Solución:

$$\begin{cases} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 3 \end{cases}$$

Los vértices serán:

$A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,4)$, $B'(0,-4)$, $F(3,0)$ y $F'(-3,0)$

La excentricidad será :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6$$

b) Hallar la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que tiene de vértices $A(8,0)$, $A'(-8,0)$ y su excentricidad vale $e=3$.

Solución:

$$\begin{cases} 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \\ e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3 \cdot 8 = 24 \Rightarrow \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{512} = 1 \\ c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 512 \end{cases}$$

3. Calcular el ángulo formado por las rectas:

a.

$$\begin{aligned} r : \frac{x-1}{-2} &= \frac{y}{1} \\ s : 3x - y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} r : 2x - 8y + 1 &= 0 \\ s : x + y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

a.

$$\begin{cases} r : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} \\ s : 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r : x + 2y - 1 = 0 \\ s : 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 3 + 2(-1)|}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{2}}{10} = 0,1414 \Rightarrow \alpha = 81^\circ 52' 12''$$

b.

$$\begin{cases} r : 2x - 8y + 1 = 0 \\ s : x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{|2 \cdot 1 + 1(-8)|}{\sqrt{4+64} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{136}} = 0,5145 \Rightarrow \alpha = 59^\circ 2' 11''$$

4. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $x + 6 = 0$ y del punto $(5,0)$.

Solución:

Sea $P(x, y)$ la distancia de este punto a la recta tiene que ser igual a la distancia de este punto al punto $C(5,0)$.

$$\begin{cases} d(P, C) = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \\ d(P, r) = \frac{|x+6|}{\sqrt{1}} = x+6 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = x+6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 = 22x + 11$$

5. Calcular la circunferencia que pasa por los puntos $(2,1)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$
$$\begin{cases} 2m + n + p + 5 = 0 \\ n + p + 1 = 0 \\ m + p + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = -2 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$