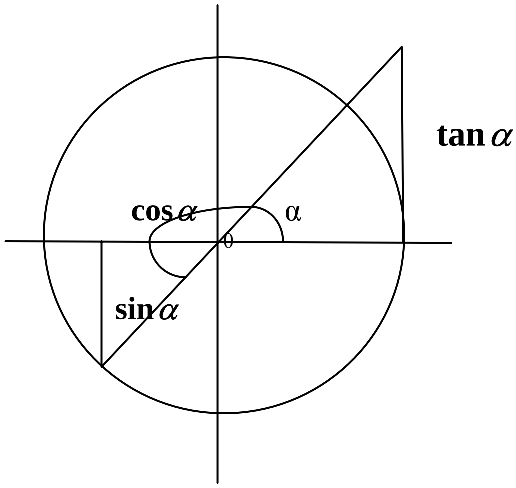
Examen de Matemáticas (1º Bachillerato)
Diciembre 2002 (recuperación)

Problema 1º Enunciar y demostrar el teorema del seno.

Problema 2º Sabemos que $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ y además que α pertenece al tercer cuadrante. Hallar el resto de las razones trigonométricas.

Solución:



Regla de Signos en el tercer cuadrante:

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
—	—	+
$\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\cot\alpha$
—	—	+

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Sustituyendo el valor que nos dan del coseno tenemos

$$\sin^2\alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{4}{\sqrt{7}} = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

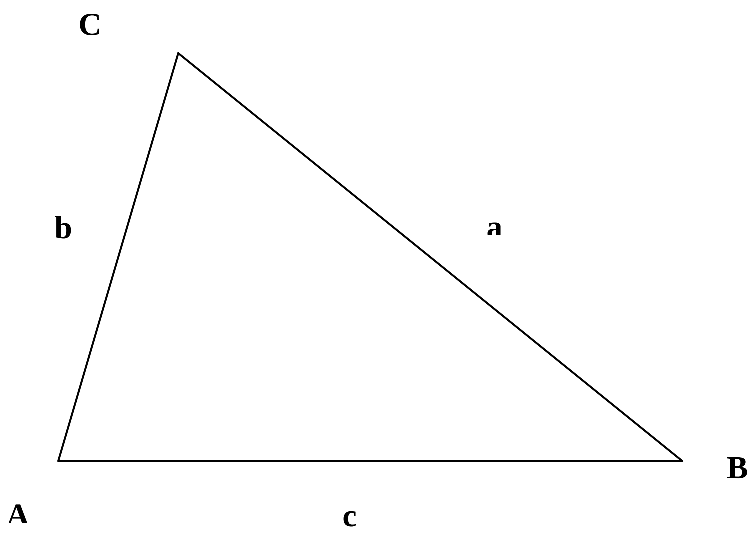
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha\Rightarrow\tan^2\alpha=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-1=\frac{7}{9}\Rightarrow$$

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Problema 3º Resolver el triangulo no rectángulo de lados $a=10$, $b=12$ y $c=14$.



Solución:

Por el teorema del coseno tenemos:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A\Rightarrow 100=144+196-2\cdot 12\cdot 14\cdot\cos A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A=44{,}42^{\circ}\Rightarrow A=44^{\circ}25'12''$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos B\Rightarrow 144=100+196-2\cdot 10\cdot 14\cdot\cos B\Rightarrow$$
$$B=57{,}12^{\circ}\Rightarrow B=57^{\circ}7'12''$$
$$A+B+C=180^{\circ}\Rightarrow C=180^{\circ}-A-C=78{,}46^{\circ}\Rightarrow C=78^{\circ}27'36''$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18\cdot 8\cdot 6\cdot 4}=\sqrt{3456}=24\sqrt{6}$$

donde $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{10+12+14}{2}=18$

Problema 4º Resolver la ecuación siguiente:

$$\sin^2 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 2 = 0$$

Solución:

$$\sin^2 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 2 = 0$$
$$(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha - 2 = 0$$
$$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 2 = 0$$
$$4(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 2 = 0$$
$$2(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0$$
$$2\cos^2\alpha - 2\cos^4\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0$$
$$2\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha + 1 = 0$$

Si llamamos $t = \cos^2\alpha$ tenemos:

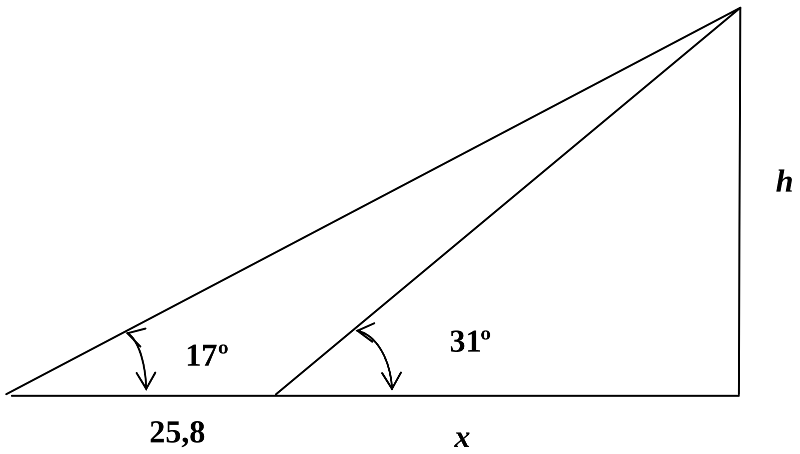
$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \quad t = \frac{1}{2}$$

$$Si \quad t = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1 \\ \cos\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0º + k\cdot 360º \\ x = 180º + k\cdot 360º \end{cases}$$

$$Si \quad t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 45º + k\cdot 360º \\ x = 315º + k\cdot 360º \end{cases} \\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 135º + k\cdot 360º \\ x = 225º + k\cdot 360º \end{cases} \end{cases}$$

Problema 5º Desde la orilla de un río se ve la copa de un árbol, que esta en el otro margen, con un ángulo de $17º$. Cruzamos el río en dirección hacia el árbol y ahora vemos la copa de este árbol con una inclinación de $31º$. Calcular la altura del árbol sabiendo que el río tiene $25{,}8m$ de ancho por el lugar donde hemos cruzado.

Solución:



$$\begin{cases} \tan 17^o = \dfrac{h}{25{,}8 + x} \\ \tan 31^o = \dfrac{h}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25{,}8 + x = \dfrac{h}{\tan 17^o} \\ x = \dfrac{h}{\tan 31^o} \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{\tan 17^o} - 25{,}8 = \frac{h}{\tan 31^o} \Rightarrow$$

$$\frac{h - 25{,}8 \cdot \tan 17^o}{\tan 17^o} = \frac{h}{\tan 31^o} \Rightarrow \left(h - 25{,}8 \cdot \tan 17^o\right)\tan 31^o = h \tan 17^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \cdot \tan 31^o - 25{,}8 \tan 17^o \tan 31^o = h \tan 17^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left(\tan 31^o - \tan 17\right) = 25{,}8 \tan 17^o \tan 31^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{25{,}8 \tan 17^o \tan 31^o}{\tan 31^o - \tan 17} = 16{,}05 m$$